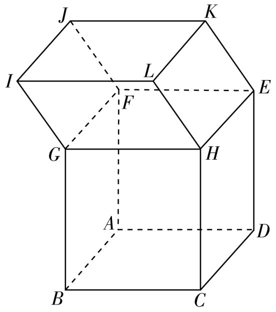
第 4 章　立体几何初步

4.1　空间的几何体

4.1.1　几类简单几何体

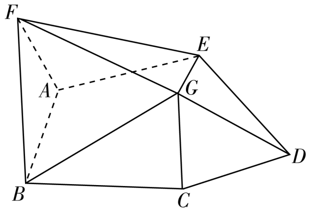
1. C　【解析】对于 A，



图①

如图①所示的几何体中，平面 $ABCD//$ 平面 $JILK$，其余各面都是平行四边形，显然不是棱柱，故 A 错误；

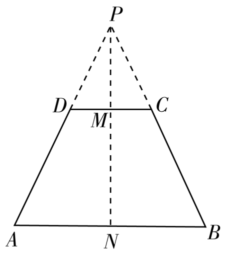
对于 B，如图②，多边形 $ABCDE$ 是平面多边形，其余各面都是三角形，显然不是棱锥，故 B 错误；



图②

对于 C，如图③，等腰梯形 $ABCD$ 上、下底边的中点分别为 M,N，则 MN 垂直于 AB 和 CD，

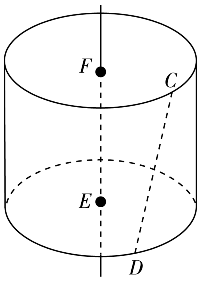
并且 AD 和 BC 延长后必定交于一点 P，且点 P 在 NM 的延长线上，所以这个梯形绕 MN 旋转 180°后是圆台，故 C 正确；



图③

对于 D，如图④，上、下圆周上的两点的连线未必平行于圆柱的轴，CD 不平

行于 EF，故不是母线，故 D 错误.

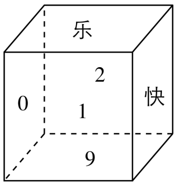


图④

故选 C.

2. B 【解析】在这六种图形中，正方体是正四棱柱的特例，即 $A \subsetneqq C$，正四棱柱是长方体的特例，即 $C \subsetneqq B$，长方体是直平行六面体的特例，即 $B \subsetneqq F$，直平行六面体是平行六面体的特例，即 $F \subsetneqq D$，平行六面体是四棱柱的特例，即 $D \subsetneqq E$. 故选 B.

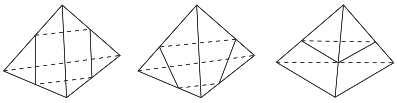
3. A 【解析】根据正方体的平面展开图按照“快”在正方体的右面还原正方体如图.



其中“1”在前面，“乐”在上面，“快”在右面，“9”在下面，“2”在后面，“0”在左面. 故选 A.

4. D 【解析】设原棱锥的高为 h，由题意得 $\left(\frac{3}{h}\right)^2=\frac{1}{4}$，则 $h=6$，因而棱台的高为 $6-3=3$. 故选 D.

5. C 【解析】根据已知，任意转动这个正四面体，则水面在容器中的形状即为作一截面将正四面体截成体积相等的两部分，根据对称性和截面性质作图如图所示.



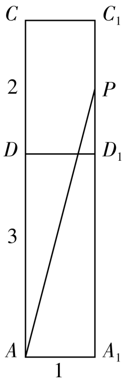
观察可知截面不可能出现直角三角形. 故选 C.

6. $\sqrt{13}$ $\frac{3\sqrt{22}}{4}$ 【解析】如图①所示，当质点经过棱 DD_1 时，

$AP=\sqrt{AA_1^2+A_1P^2}$

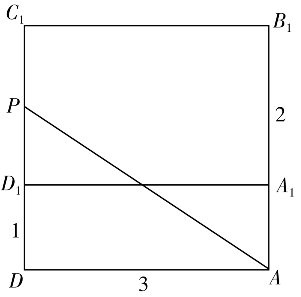
$=\sqrt{1^2+(3+1)^2}$

$=\sqrt{17}$；



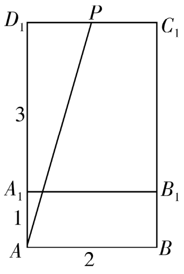
图①

如图②所示，当质点经过棱 A_1D_1 时，$AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{3^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$；



图②

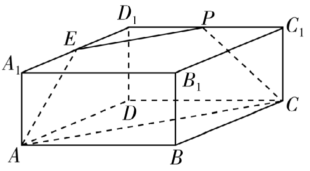
如图③所示，当质点经过棱 A_1B_1 时，$AP=\sqrt{AD_1^2+D_1P^2}=\sqrt{(1+3)^2+1^2}=\sqrt{17}$.



图③

所以最短距离为 $\sqrt{13}$.

此时质点从点 A 出发，经过 A_1D_1 的中点 E，再到达点 P，则平面 AEP 截长方体所得的截面为梯形 $ACPE$，如图④所示.



图④

由已知得 $AC=\sqrt{13}$，$EP=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

$AE=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$PC=\sqrt{2}$，

如图⑤，过点 E，P 分别作 AC 的垂线，垂足分别为 M，N，

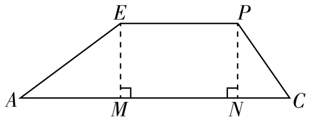
设 $EM=NP=h$，且 $MN=EP=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

故 $\sqrt{AE^2-EM^2}+MN+\sqrt{PC^2-PN^2}=AC$，

即 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-h^2}+\frac{\sqrt{13}}{2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2-h^2}=\sqrt{13}$，

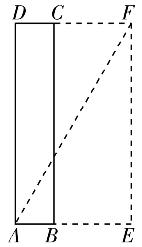
解得 $h=\sqrt{\frac{22}{13}}$.

故截面面积 $S=\frac{1}{2}(EP+AC)\cdot h=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\sqrt{13}\right)\times\sqrt{\frac{22}{13}}=\frac{3\sqrt{22}}{4}$.



图⑤

7. A 【解析】由题意，圆木的侧面展开图是矩形 $ABCD$，如图所示，则 $AB=4$ 尺，$AD=35$ 尺，延长 AB 至 E，使 $BE=2AB$，延长 DC 至 F，使 $CF=2DC$，连接 EF，AF，则葛藤生长的最短路程为 AF，故葛藤最少长 $\sqrt{35^2+(4\times3)^2}=37$(尺)．故选 A.



4.1.2 空间几何体的直观图

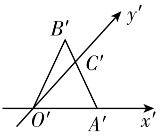
1. B 【解析】根据斜二测画法，原来垂直的未必垂直．故选 B.

2. D 【解析】因为 $\angle A$ 的两边分别平行于 x 轴，y 轴，所以在直观图中 $\angle A=90°$，由斜二测画法知 $\angle x'O'y'=45°$ 或 $\angle x'O'y'=135°$，即 $\angle A'=45°$ 或 $\angle A'=135°$．故选 D.

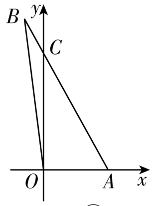
3. C 【解析】因为线段 $A'B'$ 与 y' 轴相交，设交点为 C'，如图①所示.

在直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴上，

可得 $OA=O'A'$，点 C 在 y 轴上，可得 $OC=2O'C'$，如图②所示，点 B 必在线段 AC 的延长线上，所以 $\angle BOA>\angle COA=90^{\circ}$，所以 $\triangle OAB$ 是钝角三角形.

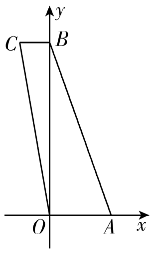


图①



图②

4. B 【解析】画出原平面图形 $OABC$，如图所示，



因为 $OA=O'A'$，$B'C'=BC$，所以 $BC=\frac{1}{2}OA$，$OB=2O'B'=2\sqrt{2}O'A'=2\sqrt{2}OA$.

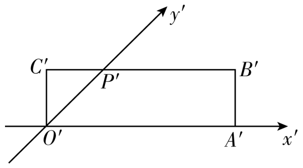
设 $BC=x$，则 $OA=2x$，$OB=4\sqrt{2}x$，故平面图形 $OABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}(BC+OA)\cdot OB=6\sqrt{2}x^{2}$，

由题可得 $6\sqrt{2}x^{2}=3\sqrt{2}$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $O'A'=2x=\sqrt{2}$.

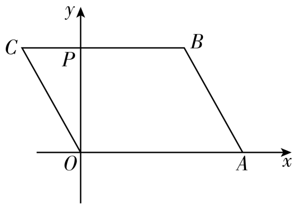
5. 14 【解析】如图①，在直观图中，设 $O'y'$ 与 $B'C'$ 交于点 P'，则 $C'P'=1$，$P'B'=3$，$O'P'=\sqrt{2}$，

如图②，在原图形中，$OA=4$，$CP=1$，$OP=2O'P'=2\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{8+1}=3$，

所以原图形周长是 $2\times(4+3)=14$.



图①



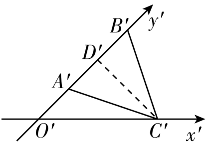
图②

6. D　【解析】∵ 直观图是等腰直角三角形 $A'B'C'$，$\angle B'A'C'=90°$，$A'O'=1$，

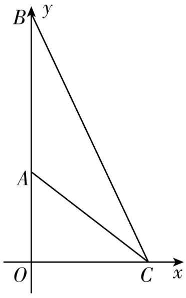
∴ $A'C'=\sqrt{2}$，∴ $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 $AC=2A'C'=2\sqrt{2}$. 故选 D.

7. C　【解析】根据斜二测画法的规则，A，B，D 中等边三角形的底边 AB 都没有改变，且对应边与 x 轴的夹角相等，而三角形的高都平行于 y 轴或与 y 轴重合，因此它们的高相等，故 A，B，D 中三组三角形的直观图是全等的. 而对于 C，画成直观图之后，第一个三角形和第二个三角形的对应角不相等，因此两个三角形的直观图不全等. 故选 C.

8. ACD　【解析】在直观图 $\triangle A'B'C'$ 中，$A'B'=2$，$A'C'=B'C'=\sqrt{5}$，取 $A'B'$ 的中点 D'，连接 $C'D'$，如图①所示，



图①



图②

则 $C'D'\perp A'B'$，而 $\angle B'O'C'=45°$，于是 $O'D'=C'D'=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$，

则 $O'A'=1$，$O'C'=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$B'O'=3$.

由斜二测画法规则作出 $\triangle ABC$，如图②所示，

则 $OC=O'C'=2\sqrt{2}$，$OA=2O'A'=2$，$OB=2O'B'=6$，$AB=4$，故 B 错误.

$AC=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，故 C 正确.

$BC=\sqrt{6^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{11}$，$AC<BC$，故 A 正确.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}OC\cdot AB=4\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

4.2　平面

1. B　【解析】①平面是无限延伸的，则一个平面长 3 m，宽 2 m 的说法错误；

②平面内有无数个点，平面可以看成点的集合，该说法是正确的；

③点、线、面都是空间中的元素，故空间几何体是由空间中的点、线、面所构成的，该说法正确.

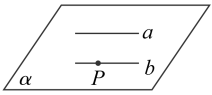
综上可得，正确说法的个数是 2. 故选 B.

2. D　【解析】当 $a\cap\alpha=P$ 时，$P\in a$，$P\in\alpha$，但 $a\not\subset\alpha$，故①为假命题.

当 $a\cap b=P$ 且 $b\subset\beta$ 时，a 可能与 β 相交，故②为假命题.

如图，$\because a/\!/b$，$P\in b$，$\therefore P\notin a$，$\therefore$ 直线 a 与点 P 确定唯一平面 α. 又 $a/\!/b$，$\therefore$ 由 a 与 b 确定唯一平面 γ，但 γ 经过直线 a 与点 P，$\therefore\gamma$ 与 α 重合，$\therefore b\subset\alpha$，故③为真命题.

两个平面的公共点必在其交线上，故④为真命题.

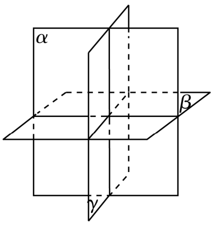


3. B　【解析】A. 如果两个平面有三个公共点，那么这两个平面可能相交或重合，所以该选项错误；

B. 若其中任意三点共线，则该直线和另外一点可确实一个平面，所以该选项正确；

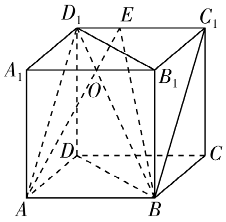
C. 空间中，相交于同一点的三条直线不一定在同一平面内，如三棱锥 $P-ABC$，相交于同一点 P 的三条直线 PA，PB，PC 不在同一平面内，所以该选项错误；

D. 三个不重合的平面最多可将空间分成八个部分，如图，所以该选项错误.



故选 B.

4. B　【解析】连接 AD_1，BC_1，BE，BD_1，



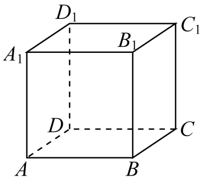
$\because O\in$ 直线 AE，$AE\subset$ 平面 ABC_1D_1，

$\therefore O\in$ 平面 ABC_1D_1.

又 $O\in$ 平面 BB_1D_1D，平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $BB_1D_1D=BD_1$，$\therefore O\in$ 直线 BD_1，

$\therefore D_1,O,B$ 三点共线. $\because \triangle ABO\backsim\triangle ED_1O$，$\therefore OB:OD_1=AB:ED_1=3:1$，$\therefore OB=3OD_1$. 故选 B.

5. C 【解析】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



①$AA_1\cap AB=A$，$AA_1\cap A_1B_1=A_1$，直线 AB，A_1B_1 与 AA_1 可以确定 1 个平面（平面 ABB_1A_1）；

②$AA_1\cap AB=A$，$AA_1\cap A_1D_1=A_1$，直线 AB，AA_1 与 A_1D_1 可以确定 2 个平面（平面 ABB_1A_1 和平面 ADD_1A_1）；

③三条直线 AB，AD，AA_1 交于一点 A，它们可以确定 3 个平面（平面 $ABCD$，平面 ABB_1A_1 和平面 ADD_1A_1）.

6. 【证明】(1) $\because A_1C\cap$ 平面 $BDC_1=O$，

$\therefore O\in A_1C$，$O\in$ 平面 BDC_1.

又 $\because A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore O\in$ 平面 ACC_1A_1.

$\because AC$，BD 交于点 M，$\therefore M\in AC$，$M\in BD$.

又 $AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，$BD\subset$ 平面 BDC_1，

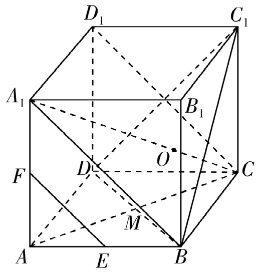
$\therefore M\in$ 平面 ACC_1A_1，$M\in$ 平面 BDC_1.

又 $C_1\in$ 平面 ACC_1A_1，$C_1\in$ 平面 BDC_1，

$\therefore C_1,O,M$ 三点在平面 ACC_1A_1 与平面 BDC_1 的交线上，

$\therefore C_1,O,M$ 三点共线.

(2) 连接 EF，A_1B，CD_1.



$\because E$ 为 AB 的中点，F 为 AA_1 的中点，

$\therefore EF // BA_1$，

又$\because BC // A_1D_1$，$BC = A_1D_1$，$\therefore$ 四边形 BCD_1A_1 是平行四边形，

$\therefore BA_1 // CD_1$. $\therefore EF // CD_1$，$\therefore E, F, C, D_1$ 四点共面.

(3)$\because EF // CD_1$，$EF \neq CD_1$，

$\therefore$ 设 CE 与 D_1F 交于一点 P，则 $P \in CE$，$CE \subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore P \in$ 平面 $ABCD$，同理，$P \in$ 平面 ADD_1A_1，

$\therefore P \in$ 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AD$，

$\therefore$ 直线 CE，D_1F，DA 三线交于一点 P，即三线共点.

7. BC 【解析】对于 A 选项，要强调该三点不在同一条直线上，故 A 错误；

对于 B 选项，由棱柱的定义可知，其侧面一定是平行四边形，故 B 正确；

对于 C 选项，可用反证法证明，故 C 正确；

对于 D 选项，若该直线经过给定两边的交点，则这条直线可能与三角形所在的平面相交，故 D 错误.

4.3 直线与直线、直线与平面的位置关系

4.3.1 空间中直线与直线的位置关系

1. B 【解析】根据异面直线的定义，对于 A，空间中不相交的直线可以是平行的，也可以是异面的，故 A 错误；对于 C，分别在两个平面内的两条直线，可以是相交的，可以是平行的，也可以是异面的，故 C 错误；对于 D，平面内的一条直线和平面外的一条直线，这两条直线可能相交、平行或异面，故 D 错误.

2. D 【解析】若直线 a 和 b 无公共点，则两条直线的位置关系为平行或异面.

3. D 【解析】对于选项 A，$DC_1 \cap CD = D$，故 A 不正确；

对于选项 B，$DC_1 // AB_1$，故 B 不正确；

对于选项 C，直线 DC_1 与直线 CD_1 相交，故 C 不正确；

对于选项 D，因为直线 DC_1 与直线 A_1D_1 不同在任意一个平面，所以直线 DC_1 与直线 A_1D_1 是异面直线，故 D 正确. 故选 D.

4.【解】由长方体的性质得 $AD//A_1D_1$，

$\therefore \angle CA_1D_1$（或其补角）是 A_1C 与 AD 所成的角.

连接 D_1C，在 $\triangle A_1D_1C$ 中，$A_1D_1=1$，

$A_1C=\sqrt{A_1A^2+AC^2}=2$，

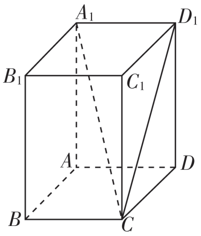
$D_1C=\sqrt{CD^2+DD_1^2}=\sqrt{3}$，

即 $A_1D_1^2+D_1C^2=A_1C^2$，

$\therefore \tan\angle CA_1D_1=\dfrac{CD_1}{A_1D_1}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle CA_1D_1=60°$，

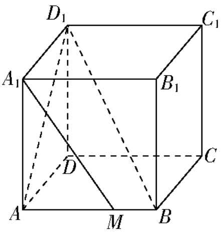
即异面直线 A_1C 与 AD 所成角为 $60°$.



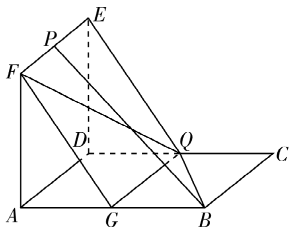
5. D　【解析】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AB 上一点，A_1D_1 与 AB 为异面直线，AD_1 与 BD_1 均与这两条直线都相交，但这两条直线是相交直线；

A_1M 与 BD_1 均与这两条直线都相交，但这两条直线是异面直线.

由排除法可知选 D.



6. C　【解析】取 AB 的中点 G，连接 GQ，GF，EQ，则 $GQ//AD$，



又 $AD//EF$，$\therefore GQ//EF$，则 G,Q,E,F 确定平面 $GQEF$，

又 $FQ\subset$ 平面 $GQEF$，$P\in$ 平面 $GQEF$，$P\notin$

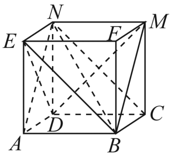
FQ，$B\notin$平面 $GQEF$，

∴ 直线 FQ 与 PB 是异面直线.

故选 C.

7. CD 【解析】∵ A,M,C,C_1 四点不共面，∴ 直线 AM 与 CC_1 是异面直线，故 A 错误；同理，直线 AM 与 BN 也是异面直线，故 B 错误. 同理，直线 BN 与 MB_1 也是异面直线，故 C 正确；同理，直线 AM 与 DD_1 也是异面直线，故 D 正确. 故选 CD.

8. CD 【解析】由展开图还原正方体如图所示. 显然 AB 不正确；C 中易知 $\angle ANC=60°$，即 CN 与 BM 成 $60°$角，C 正确；D 正确.



4.3.2 空间中直线与平面的位置关系

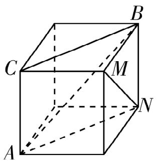
课时 1 直线与平面平行的判定及性质

1. B 【解析】直线 l 不平行于平面 α，则直线 l 与平面 α 相交或直线 l 在平面 α 内. 又 $l\not\subset\alpha$，所以直线 l 与平面 α 相交，所以 α 内不存在与 l 平行的直线. 故选 B.

2. C 【解析】选项 C 中，平面 α 与平面 β 有公共点 A，则它们相交于过点 A 的一条直线，而不是点 A，故 C 不正确.

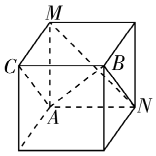
3. D 【解析】对于 A 选项，由图形可知，直线 MN 与平面 ABC 相交；

对于 B 选项，如图所示，连接 AN，



在正方体中，$AC/\!/BN$，所以 A,C,B,N 四点共面，所以直线 MN 与平面 ABC 相交；

对于 C 选项，如图所示，连接 BN，

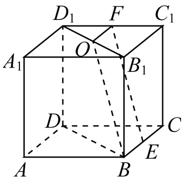


在正方体中，$AN//BC$，所以 A,C,B,N 四点共面，所以直线 MN 与平面 ABC 相交；

对于 D 选项，在正方体中，$AN//CM$ 且 $AN=CM$，则四边形 $ACMN$ 为平行四边形，所以$MN//AC$，

因为 $AC\subset$ 平面 ABC，$MN\not\subset$ 平面 ABC，所以$MN//$平面 ABC. 故选 D.

4. 平行　【解析】如图，连接 B_1D_1，取 D_1B_1 的中点 O，连接 OF，OB.



$\because$ F 为 D_1C_1 的中点，O 为 B_1D_1 的中点，

$\therefore$ $OF//B_1C_1$ 且 $OF=\dfrac{1}{2}B_1C_1$.

又$\because$ $BE//B_1C_1$，且 $BE=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，

$\therefore$ $OF//BE$，且 $OF=BE$.

$\therefore$ 四边形 $OFEB$ 为平行四边形，

$\therefore$ $EF//BO$.

$\because$ $EF\not\subset$ 平面 BB_1D_1D，$BO\subset$ 平面 BB_1D_1D，

$\therefore$ $EF//$平面 BB_1D_1D.

5. 1∶1　【解析】如图，连接 BC_1，设 $BC_1\cap B_1C=E$，连接 DE，则 DE 是平面 A_1BC_1 与平面 B_1CD 的交线.

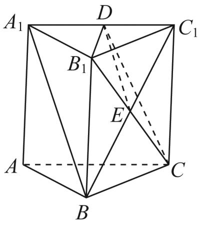
$\because$ $A_1B//$平面 B_1CD，$\therefore$ $A_1B//DE$.

$\because$ 四边形 BCC_1B_1 是菱形，

$\therefore$ E 为 BC_1 的中点，

$\therefore$ D 为 A_1C_1 的中点，

$\therefore$ $A_1D:DC_1=1:1$.



6.【证明】(1)$\because$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为平行四边形，$\therefore$ $BC//AD$.

又$\because$ $AD\subset$平面 PAD，$BC\not\subset$平面 PAD，

$\therefore$ $BC//$平面 PAD.

(2)如图，连接 AC，交 BD 于点 H，连接

MH.

$\because H$ 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点,

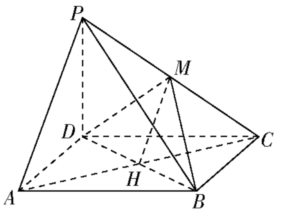
$\therefore H$ 为 AC 的中点.

又$\because M$ 为 PC 的中点,

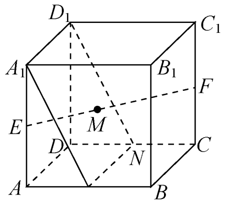
$\therefore MH$ 为$\triangle PAC$ 的中位线,$\therefore MH/\!/AP$.

又 $MH\subset$平面 MBD,$AP\not\subset$平面 MBD,

$\therefore AP/\!/$平面 MBD.

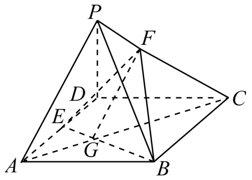


7. D 【解析】如图,在 EF 上任意取一点 M,直线 A_1D_1 与 M 确定一个平面,这个平面与 CD 有且仅有 1 个交点 N,当 M 取不同的位置就确定不同的平面,从而与 CD 有不同的交点 N,而直线 MN 与直线 A_1D_1,EF,CD 都有交点.



8. D 【解析】如图,连接 AC 交 BE 于 G,连接 FG,因为 $PA/\!/$平面 EBF,$PA\subset$平面 PAC,平面 $PAC\cap$平面 $BEF=FG$,所以 $PA/\!/FG$,所以$\dfrac{PF}{FC}=\dfrac{AG}{GC}$.

又 $AD/\!/BC$,E 为 AD 的中点,所以$\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{PF}{FC}=\dfrac{1}{2}$.



9. ④ 【解析】若一条直线和两个相交平面的交线平行,则这条直线可能在其中一个平面内且与另一个平面平行,也可能不在任何一个平面内且与两个平面都平行.

10. ABD 【解析】因为 O 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点,所以 $AO=OC$.

又因为 Q 为 PA 的中点,所以

$OQ // PC$.

由线面平行的判定定理，可知 A，B 正确.

直线 AQ 也就是直线 AP，所以 AQ 与平面 PCD 相交，故 C 错误.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB // CD$.

因为 $CD \not\subset$ 平面 PAB，$AB \subset$ 平面 PAB，所以 $CD //$ 平面 PAB. 故 D 正确.

课时 2　直线与平面垂直的判定及性质

1. D　【解析】当 $a // \alpha$ 时，$\theta = 0°$；当 $a \perp \alpha$ 时，$\theta = 90°$；当 a 和 α 斜交时，θ 的取值范围是 $\{\theta | 0° < \theta < 90°\}$. 综上，$\theta$ 的取值范围是 $\{\theta | 0° \leqslant \theta \leqslant 90°\}$.

2. B　【解析】对于①，若 $l // m$，$m // n$，又 $l \perp \alpha$，则 $n \perp \alpha$，故①正确. 对于②，若 $m \perp \alpha$，$n \perp \alpha$，所以 $m // n$，由于 $l // m$，则 $l // n$，故②正确. 对于③，若 $l // \alpha$，$l \perp m$，所以 $m // \alpha$ 或 $m \subset \alpha$ 或 $m \perp \alpha$ 或 m 与 α 斜交，故③错误. 故选 B.

3. C　【解析】因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD \perp AC$. 又因为 $MC \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $BD \perp MC$. 因为 $AC \cap MC = C$，AC，$MC \subset$ 平面 AMC，所以 $BD \perp$ 平面 AMC. 又因为 $MA \subset$ 平面 AMC，所以 $MA \perp BD$. 显然直线 MA 与直线 BD 不相交. 故选 C.

4. C　【解析】由正方体的性质得 $BD // B_1D_1$，因为 $BD \not\subset$ 平面 CB_1D_1，$B_1D_1 \subset$ 平面 CB_1D_1，所以 $BD //$ 平面 CB_1D_1，故 A 正确. 连接 AC（图略），由正方体的性质得 $AC \perp BD$，又 $CC_1 \perp BD$，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1，所以 $AC_1 \perp BD$，故 B 正确. 异面直线 AD 与 CB_1 所成角即为直线 BC 与 CB_1 所成的锐角（$\angle BCB_1$ 或其补角），等腰直角三角形 BCB_1 中，$\angle BCB_1 = 45°$，故 C 不正确. 由正方体的性质得 $BD // B_1D_1$，由 B 知 $AC_1 \perp BD$，所以 $AC_1 \perp B_1D_1$，同理可证 $AC_1 \perp CB_1$. 又因为 $B_1D_1 \cap CB_1 = B_1$，所以 $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1，故 D 正确. 故选 C.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　【解析】$\because PA$，PB，PC 两两垂直，

$PB\cap PC=P$,

$\therefore PA\perp$ 平面 PBC. 又 $PA=1$, $PB=PC=\sqrt{2}$,

$\therefore AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$,

$\therefore$ 点 A 到棱 BC 的距离为$\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

设点 P 到平面 ABC 的距离为 h,由 $V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$ 得,$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times h$,解得 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即点 P 到平面 ABC 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. (1)【**证明**】因为 $AB=AC$ 且 M 为 BC 的中点,所以 $AM\perp BC$.

又在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BB_1\perp$ 平面 ABC,$AM\subset$平面 ABC. 所以 $BB_1\perp AM$. 又因为 $AM\perp BC$,$BB_1\cap BC=B$,所以 $AM\perp$平面 BCC_1B_1. 又因为 $BN\subset$平面 BCC_1B_1,

所以 $AM\perp BN$.

因为 M,N 分别为 BC,CC_1 的中点,

所以 $BM=CN=2$.

又因为 $BB_1=CB$,$\angle MBB_1=\angle NCB=90°$,所以$\triangle MBB_1\cong\triangle NCB$,

所以$\angle BMB_1=\angle CNB$,$\angle BB_1M=\angle CBN$,

所以 $\angle BMB_1+\angle CBN=\angle CNB+\angle CBN=90°$,所以$BN\perp B_1M$.

又因为 $AM\subset$平面 AMB_1,$B_1M\subset$平面 AMB_1,$AM\cap B_1M=M$,

所以$BN\perp$平面 AMB_1.

(2)【**解**】设 $BN\cap B_1M=O$,连接 AO(图略),由(1)可知 $BO\perp$平面 AMB_1,所以 AO 为斜线 AB 在平面 AMB_1 内的投影,所以 $\angle BAO$ 为直线 AB 与平面 AMB_1 所成的角,由题可知 $AN=BN=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

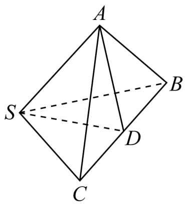
所以$\triangle ABN$ 为等腰三角形,过点 N 作 $NE\perp AB$ 于 E,则 E 为 AB 的中点,所以 $NE=\sqrt{BN^2-BE^2}=4$,由等面积法可知 $AO=\frac{AB\cdot NE}{BN}=\frac{4\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. 在Rt$\triangle AOB$

中，$\angle AOB=90°$，所以 $\cos\angle BAO=\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{4}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以直线 AB 与平面 AMB_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. C 【解析】因为 $\angle ASB=\angle ASC=60°$，$SA=SB=SC$，

所以 $\triangle ASB$ 与 $\triangle SAC$ 都是等边三角形，所以 $AB=AC$.

如图所示，取 BC 的中点 D，连接 AD，SD，则 $AD\perp BC$. 设 $SA=a$，则在 $\text{Rt}\triangle SBC$ 中，$BC=\sqrt{2}a$，$CD=SD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.



在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，则 $AD^2+SD^2=SA^2$，所以 $AD\perp SD$.

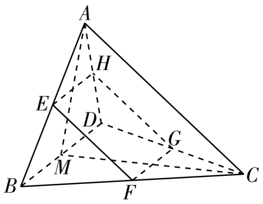
又因为 $BC\cap SD=D$，BC，$SD\subset$ 平面 SBC，所以 $AD\perp$ 平面 SBC.

则 $\angle ASD$ 即为直线 AS 与平面 SBC 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle ASD$ 中，$SD=AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

所以 $\angle ASD=45°$，即直线 AS 与平面 SBC 所成的角为 $45°$.

8. C 【解析】连接 BD，取 BD 的中点 M，连接 AM，CM，AC，如图.



因为 $AB=BC=CD=AD$，且各边中点分别为 E，F，G，H，

所以 $EH//BD$，$EH=\dfrac{1}{2}BD$，$FG//BD$，$FG=\dfrac{1}{2}BD$，$AM\perp BD$，$CM\perp BD$，

所以 $EH//FG$，$EH=FG$，四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又因为 $AM\cap CM=M$，AM，$CM\subset$ 平面

ACM,所以 $BD\perp$平面 ACM,

因为 $AC\subset$平面 ACM,所以 $BD\perp AC$,因为 $HG/\!/AC$,所以 $BD\perp HG$,

又因为 $EH/\!/BD$,所以 $EH\perp HG$,所以四边形 $EFGH$ 为矩形,

易知 BD 与 AC 不一定相等,故 EH 与 EF 不一定相等,故四边形 $EFGH$ 不一定为正方形. 故选 C.

9. ①②③　【解析】如图,连接 AC.

由题意知 $PA\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,$\therefore PA\perp BC$.

又 $AC\perp BC$,$PA\cap AC=A$,PA,$AC\subset$平面 PAC,$\therefore BC\perp$平面 PAC.

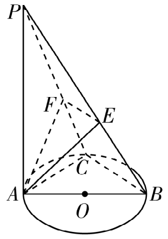
$\because AF\subset$平面 PAC,$\therefore BC\perp AF$. 又$\because AF\perp PC$,$BC\cap PC=C$,BC,$PC\subset$平面 PBC,$\therefore AF\perp$平面 PBC.

$\because PB\subset$平面 PBC,$\therefore AF\perp PB$.

又 $AE\perp PB$,$AE\cap AF=A$,AE,$AF\subset$平面 AEF,$\therefore PB\perp$平面 AEF.

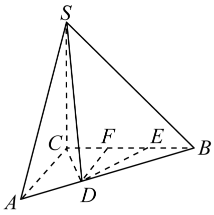
$\because EF\subset$平面 AEF,$\therefore PB\perp EF$.

又 AF 与 AE 不平行且相交,$\therefore AE$ 与平面 PBC 不垂直. 故①②③正确.



10. $\frac{1}{2}$　【解析】当 $AB_1\perp$平面 C_1DF 时,$AB_1\perp DF$,又在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1\perp A_1B_1$,则 $\text{Rt}\triangle AA_1B_1\backsim\text{Rt}\triangle DEB_1$,故 $\angle B_1AA_1=\angle FDB_1$. 所以 $\tan\angle B_1AA_1=\tan\angle FDB_1$,即 $\frac{B_1A_1}{AA_1}=\frac{B_1F}{B_1D}$,所以 $B_1F=\frac{B_1A_1\cdot B_1D}{AA_1}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

11.【证明】如图,取 CE 的中点 F,连接 DF,因为 $CD=ED$,所以 $DF\perp BC$,又 $AC\perp BC$,则 $DF/\!/AC$,



易得 $\triangle BDF \backsim \triangle BAC$，因为 $CE=2EB=2, AC=\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{DF}{AC}=\frac{BF}{BC}=\frac{2}{3}$，解得 $DF=1$，即 $DF=CF=FE$，

则点 D 在以 CE 为直径的圆上，故 $DE\perp DC$，

又 $SC\perp$ 平面 ABC，$DE\subset$ 平面 ABC，则 $SC\perp DE$，

而 $DC\cap SC=C$，DC，$SC\subset$ 平面 SCD，

故 $DE\perp$ 平面 SCD.

(2) 由(1)可知 $DE\perp$ 平面 SCD，$BC=\frac{3}{2}CE$，$ED=\sqrt{2}$，

则点 B 到平面 SCD 的距离 d 是点 E 到平面 SCD 的距离的 $\frac{3}{2}$ 倍，

即 $d=\frac{3}{2}ED=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以点 B 以平面 SCD 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

12. (1)【**证明**】由题意得 $DC=AC=\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+DC^2=AD^2$，即 $AC\perp DC$.

又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore PA\perp DC$，且 $PA\cap AC=A$，

$\therefore DC\perp$ 平面 PAC.

(2)【**解**】过点 A 作 $AH\perp PC$ 于 H.

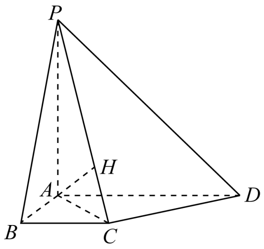
由(1)可得 $DC\perp AH$，

$\because PC\cap DC=C$，$\therefore AH\perp$ 平面 PCD.

$\because$ 在 $Rt\triangle PAC$ 中，$PA=2$，$AC=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{6}$，$\frac{PH}{PA}=\frac{PA}{PC}$，

$\therefore PH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，可得 $PH=\frac{2}{3}PC$，即在棱 PC 上存在点 H，且 $PH=\frac{2}{3}PC$，

使得 $AH\perp$ 平面 PCD.



13. AD 【解析】由线面垂直的定义及性质定理知 A,D 正确;B 中 b 可能满足 $b\subset\alpha$,故 B 错误;C 中 b 可能与 α 相交但不垂直,也可能平行,故 C 错误.

14. ABD 【解析】如图,设 AC 交 BD 于点 M,连接 EM.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 M 为 AC 的中点.

又因为 $PC//$平面 BDE,$PC\subset$平面 APC,且平面 $APC\cap$平面 $BDE=EM$,所以 $PC//EM$,所以 E 为 PA 的中点,故 A 正确.

由 $PA\perp$底面 $ABCD$,$BD\subset$底面 $ABCD$,所以 $PA\perp BD$,

又因为 $AC\perp BD$,$AC\cap PA=A$,AC,$PA\subset$平面 PAC,

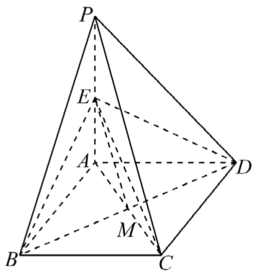
所以 $BD\perp$平面 PAC,故 B 正确.

因为 $AB//CD$,所以 PB 与 CD 所成的角即 PB 与 AB 所成的角,由 $PA=AB$ 知$\angle ABP=\dfrac{\pi}{4}$,故 C 错误.

因为 $V_{C-BDE}=V_{E-BCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot EA$,

$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PA$,

又因为 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$,$PA=2EA$,所以$\dfrac{V_{C-BDE}}{V_{P-ABCD}}=\dfrac{1}{4}$,故 D 正确. 故选 ABD.



4.4 平面与平面的位置关系

4.4.1 平面与平面平行

1. D 【解析】对于 A,当 $\alpha\cap\beta=l$,$l//a$,$a\not\subset\alpha$ 且 $a\not\subset\beta$ 时,满足 α,β 都平行于直线 a,不能推出 $\alpha//\beta$;

对于 B,当 $\alpha\cap\beta=b$,且在 α 内直线 b 一侧有两个点,另一侧有一个点,当三点到 β 的距离相等时,不能推出 $\alpha//\beta$;

对于 C，当 l 与 m 平行时，不能推出 $\alpha /\!/ \beta$；

对于 D，若 $l /\!/ \alpha, l /\!/ \beta$，则存在过直线 l 的平面 γ，使得 $\gamma \cap \alpha = l_1, \gamma \cap \beta = l_2$，于是得 $l_1 /\!/ l /\!/ l_2, l_1 \not\subset \beta, l_2 \subset \beta$，则 $l_1 /\!/ \beta$，若 $m /\!/ \alpha, m /\!/ \beta$，则存在过直线 m 的平面 δ，使得 $\delta \cap \alpha = m_1, \delta \cap \beta = m_2$，于是得 $m_1 /\!/ m /\!/ m_2, m_1 \not\subset \beta, m_2 \subset \beta$，则 $m_1 /\!/ \beta$，又 l, m 是两条异面直线，则 l_1, m_1 是平面 α 内的两条相交直线，所以 $\alpha /\!/ \beta$. 故选 D.

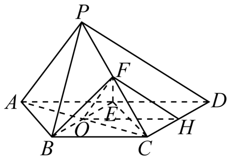
2. A 【解析】选项 A 中，直线 a 可能与 β 平行，也可能在 β 内，故选项 A 为假命题；三角形的两边所在直线必相交，这两条相交直线平行于同一个平面，那么三角形所在的平面与这个平面平行，所以选项 C 为真命题；由平面与平面平行的性质可知，选项 B，D 也为真命题，故选 A.

3. ①② 【解析】由 M, O 分别为 AP, AC 的中点可得 $PC /\!/ OM$，因为 $PC \not\subset$ 平面 OMN，$OM \subset$ 平面 OMN，所以 $PC /\!/$ 平面 OMN，结论①正确.

同理 $PD /\!/ ON$，因为 $PD \cap PC = P$，$OM \cap ON = O$，所以平面 $PCD /\!/$ 平面 OMN，结论②正确.

由于 M, N 分别为侧棱 PA, PB 的中点，所以 $MN /\!/ AB$，又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB /\!/ CD$，所以 $MN /\!/ CD$，所以直线 PD 与直线 MN 所成的角即为直线 PD 与直线 CD 所成的锐角，为 $\angle PDC$. 知三角形 PDC 为等边三角形，所以 $\angle PDC = 60°$，故③错误. 故答案为①②.

4. 【证明】(1) 如图，连接 EC.



因为 $AD /\!/ BC$，$BC = \frac{1}{2} AD$，E 为 AD 的中点，所以 $BC /\!/ AE$，且 $BC = AE$，

所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

所以 O 为 AC 的中点.

又因为 F 是 PC 的中点，所以 $FO /\!/ AP$.

又 $FO \subset$ 平面 BEF，$AP \not\subset$ 平面 BEF，

所以 $AP//$平面 BEF.

(2)因为 F,H 分别是 PC,CD 的中点，

所以 $FH//PD$.

又因为 $FH\not\subset$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，

所以 $FH//$平面 PAD.

又因为 O 是 AC 的中点，H 是 CD 的中点，

所以 $OH//AD$. 又因为 $OH\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，所以 $OH//$平面 PAD.

又因为 $FH\cap OH=H$，

所以平面 $OHF//$平面 PAD.

5. C 【解析】如图，分别取 AB,C_1D_1 的中点 F,E，连接 A_1E,A_1F,FC,CE,PF.

易知 $PF//C_1C,PF=C_1C$，可得四边形 $PFCC_1$ 为平行四边形，所以 $PC_1//FC$，$PC_1=FC$.

因为 $EC_1//A_1P,EC_1=A_1P$，所以四边形 EC_1PA_1 为平行四边形，所以 $A_1E//PC_1$，$A_1E=PC_1$，

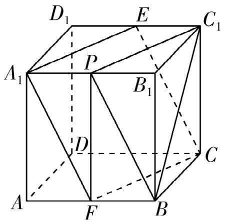
所以 $A_1E//FC,A_1E=FC$，所以四边形 A_1ECF 为平行四边形，$A_1F=EC$.

因为 $A_1P//BF,A_1P=BF$，所以四边形 A_1PBF 为平行四边形，所以 $A_1F//PB$.

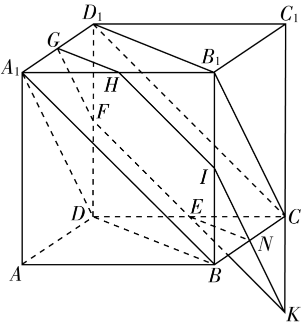
因为 $A_1E\cap A_1F=A$，$A_1E,A_1F\subset$平面 A_1ECF，$PC_1\cap PB=P$，$PC_1,PB\subset$平面 PBC_1，所以平面 $A_1ECF//$平面 PBC_1，则平面 A_1ECF 即为过点 A_1 且与截面 PBC_1 平行的截面.

因为 $A_1E=\sqrt{A_1D_1^2+D_1E^2}=2\sqrt{5}$，$A_1F=\sqrt{A_1A^2+AF^2}=2\sqrt{5}$，

所以截面 A_1ECF 的周长为 $2(A_1E+A_1F)=8\sqrt{5}$.



6. B 【解析】如图，在正方体中，取 E,F,G,H,I 分别是 $CD,DD_1,A_1D_1,A_1B_1,BB_1$ 的中点.



因为 N 为 BC 的中点，所以 $BD/\!/EN$，

又 $A_1B/\!/D_1C$，$EF/\!/D_1C$，则 $A_1B/\!/EF$.

由 $BD\subset$ 平面 A_1BD，$EN\not\subset$ 平面 A_1BD，则 $EN/\!/$平面 A_1BD，同理可得 $EF/\!/$平面 A_1BD，

由 $EN\cap EF=E$，EN，$EF\subset$ 平面 $EFGHIN$，故平面 $EFGHIN/\!/$ 平面 A_1BD，

所以平面 $EFGHIN$ 中的直线平行于平面 A_1BD，

由 $MN/\!/$平面 A_1BD 且点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动，得 M 在直线 EF 上运动，要使 MN 最小，只需 $MN\perp EF$，延长 FE，C_1C 交于 K，连接 NK，故只需求出 $\triangle ENK$ 底边 EK 上的高即可，由已知可得 $CE=CK=CN=1$，则 $\triangle ENK$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以底边 EK 上的高为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即线段 MN 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 B.

7. $(8,10)$ 【解析】$\because AC/\!/$平面 $EFGH$，$AC\subset$ 平面 ACD，平面 $ACD\cap$ 平面 $EFGH=GH$，$\therefore AC/\!/GH$. 同理 $EF/\!/AC$，$\therefore EF/\!/GH$. 同理 $EH/\!/FG/\!/BD$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. 由 $AC/\!/GH$，$EH/\!/BD$，可设 $\dfrac{DH}{DA}=\dfrac{GH}{AC}=k(0<k<1)$，

则 $\dfrac{AH}{DA}=\dfrac{EH}{BD}=1-k$，

$\therefore GH=5k$，$EH=4(1-k)$，

$\therefore$ 周长 $=8+2k$.

又 $\because 0<k<1$，$\therefore$ 四边形 $EFCH$ 周长的取值范围为 $(8,10)$.

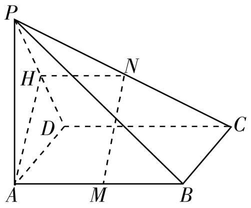
8. (1)【证明】如图，取 PD 的中点 H，连接 AH，NH. 由 N 是 PC 的中点，H 是

PD 的中点，知 $NH /\!/ DC$，$NH=\frac{1}{2}DC$.

由 M 是 AB 的中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，知 $AM /\!/ DC$，$AM=\frac{1}{2}DC$，

$\therefore NH /\!/ AM$，$NH=AM$，$\therefore$ 四边形 $AMNH$ 为平行四边形. $\therefore MN /\!/ AH$.

由 $MN \not\subset$ 平面 PAD，$AH \subset$ 平面 PAD，知 $MN /\!/$ 平面 PAD.



(2)【解】$\because M$ 是 AB 中点，当 Q 是 PB 的中点时，有 $MQ /\!/ PA$，又由 $MN /\!/ AH$，且 $PA \cap AH=A$，$MQ \cap MN=M$，则有平面 $MNQ /\!/$ 平面 PAD.

即当 Q 为 PB 的中点时，平面 $MNQ /\!/$ 平面 PAD.

9. BD 【解析】对于 A，两条平行线中的另一条直线可能在这个平面内，所以不正确；

对于 B，应用两平面平行的性质可知正确；

对于 C，若两个平面相交，则一个平面内平行于交线的直线均平行于另一个平面，所以 C 不正确；

对于 D，可以由两个平面平行的定义可知 D 正确.

4.4.2 平面与平面垂直

1. D 【解析】对于选项 A，若 $\alpha /\!/ \beta$，$m \subset \alpha$，则由面面平行的性质有 $m /\!/ \beta$，所以 A 正确；

对于选项 B，若 $m \perp \alpha$，$m /\!/ n$，则由线面平行的性质有 $n \perp \alpha$，又 $n \subset \beta$，

从而由面面垂直的判定定理有 $\alpha \perp \beta$，所以 B 正确；

对于选项 C，若 $n \perp \alpha$，$n \perp \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$，又 $m \perp \alpha$，所以 $m \perp \beta$，所以 C 正确；

对于选项 D，若 $m \perp \alpha$，$m \perp n$，

则 $n /\!/ \alpha$ 或 $n \subset \alpha$，所以 D 错误.

故选 D.

2. C 【解析】$\because PA=BC=1, PB=AC=\sqrt{2}, PC=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 在$\triangle PBC$中,$PB^2+BC^2=(\sqrt{2})^2+1^2=(\sqrt{3})^2=PC^2$,

$\therefore BC\perp PB$.

又 $PA\perp BC, PA\cap PB=P$,

$\therefore BC\perp$平面 PAB.

又 $BC\subset$平面 ABC, $BC\subset$平面 PBC,

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 PBC,平面 $PAB\perp$平面 ABC,

故选项 A,B 正确.

$\because$ 在$\triangle PAC$中,$PA^2+AC^2=1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2=PC^2$,

$\therefore PA\perp AC$.

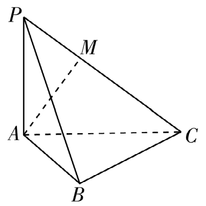
$\because PA\perp BC, BC\cap AC=C$,

$\therefore PA\perp$平面 ABC.

又$\because PA\subset$平面 PAC,

$\therefore$ 平面 $PAC\perp$平面 ABC,故选项 D 正确.

对于 C 选项,若假设平面 $PAC\perp$平面 PBC,则过点 A 作 $AM\perp PC$ 于点 M,如图.



由平面 $PAC\cap$平面 $PBC=PC$,

$\therefore AM\perp$平面 PBC,则 $AM\perp BC$.

又 $PA\perp BC, PA\cap AM=A$,

$\therefore BC\perp$平面 PAC, $\therefore BC\perp AC$,

$\because PA\perp AB$, $\therefore AB=\sqrt{PB^2-PA^2}=1$,

$\therefore AB^2+BC^2=2=AC^2$, $\therefore BC\perp AB$,

$\therefore BC\perp AC$ 与 $BC\perp AB$ 矛盾,故假设不正确,故选项 C 错误.

故选 C.

3. B 【解析】$\because PA\perp$底面 $ABCD$, $CD\subset$平面$ABCD$, $\therefore CD\perp PA$.

又底面 $ABCD$ 是正方形, $\therefore CD\perp AD$.

又 $PA\cap AD=A$, $\therefore CD\perp$平面 PAD,则 $CD\perp PD$,

可知$\angle PDA$为侧面 PCD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角. 在 Rt$\triangle PAD$ 中,由 $PA=AD=1$,可得$\angle PDA=45°$.

$\therefore$ 侧面 PCD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角的大小是 $45°$. 故选 B.

4. C 【解析】对于①，由题意得，$BB_1 /\!/ AA_1$，则直线 AD_1 与直线 BB_1 所成的角与直线 AD_1 与直线 AA_1 所成的角相等，即 $\angle A_1AD_1$，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，所以 $\tan\angle A_1AD_1=\dfrac{A_1D_1}{A_1A}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，因为 $0°<\angle A_1AD_1<90°$，所以 $\angle A_1AD_1=60°$，即直线 AD_1 与直线 BB_1 所成的角为 $60°$，故①正确；

对于②，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp$ 平面 CC_1D_1D，所以直线 BC_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角为 $\angle BC_1C$，因为 $\tan\angle BC_1C=\dfrac{BC}{C_1C}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，$0°<\angle BC_1C<90°$，所以 $\angle BC_1C=60°$，则直线 BC_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角为 $60°$，故②正确；

对于③，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $BC_1\perp AB$，$BC\perp AB$，又因为平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $ABCD=AB$，所以平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角为 $\angle CBC_1$，由②得，$\angle CBC_1=90°-\angle BC_1C=90°-60°=30°$，则平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $30°$，故③错误；

对于④，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以平面 $ABC_1D_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，则平面 ABC_1D_1 与平面 ADD_1A_1 所成的二面角为直二面角，故④正确. 故选 C.

5. 3 【解析】$\because PA\perp PB$，$PA\perp PC$，$PB\cap PC=P$，$\therefore PA\perp$ 平面 PBC.

$\because PA\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAC，

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC. 同理可证平面 $PAB\perp$ 平面 PAC 成立. 故互相垂直的平面有 3 对.

6. D 【解析】$\because PA\perp$ 平面 ABC，

$\therefore \angle ADP$ 是直线 PD 与平面 ABC 所成

的角.

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$\therefore AD=2AB$,

即 $\tan\angle ADP=\frac{PA}{AD}=\frac{2AB}{2AB}=1$,

$\therefore$ 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 $45°$,故选 D.

7. (1)【解】因为 $AB//CD$,所以 $\angle CDP$ 就是异面直线 AB 与 PD 所成的角或其补角.

因为 $PC\perp PD$,$PC=PD=2$,

所以 $\angle CDP=45°$,所以异面直线 AB 与 PD 所成的角为 $45°$.

(2)【证明】因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD,平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$,$AD\perp CD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AD\perp$ 平面 PCD.

因为 $PC\subset$ 平面 PCD,所以 $AD\perp PC$.

又 $PC\perp PD$,$AD\cap PD=D$,AD,$PD\subset$ 平面 APD,

所以 $PC\perp$ 平面 APD. 又 $DM\subset$ 平面 APD,所以 $DM\perp PC$.

又 $AD=PD$,M 为 PA 的中点,

所以 $DM\perp AP$.

又 $PC\cap AP=P$,PC,$AP\subset$ 平面 APC,

所以 $DM\perp$ 平面 APC.

又 $DM\subset$ 平面 MCD,

所以平面 $APC\perp$ 平面 MCD.

(3)【解】因为 $DM\perp$ 平面 APC,

$MC\subset$ 平面 APC,

所以 $DM\perp CM$. 又 $DM\perp PM$,

所以 $\angle CMP$ 就是二面角 $C-MD-P$ 的平面角.

因为 $PC\perp$ 平面 APD,$MP\subset$ 平面 APD,

所以 $PC\perp MP$.

又 $DM=\sqrt{2}$,$CD=2\sqrt{2}$,所以 $CM=\sqrt{6}$.

又 $CP=2$,所以 $MP=\sqrt{2}$,

所以 $\cos\angle CMP=\frac{MP}{CM}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 $C-MD-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. (1)【证明】由直四棱柱,得 $BB_1//DD_1$,

又 $\because BB_1=DD_1$,$\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,$\therefore B_1D_1//BD$.

而 $BD \subset$ 平面 A_1BD，$B_1D_1 \not\subset$ 平面 A_1BD，

$\therefore B_1D_1 /\!/$ 平面 A_1BD.

(2)【证明】由题得 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$，$AC \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BB_1 \perp AC$.

又 $BD \perp AC$，且 $BD \cap BB_1 = B$，

$\therefore AC \perp$ 平面 BB_1D.

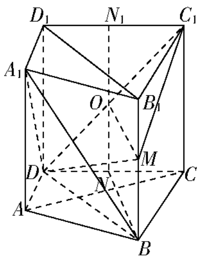
而 $MD \subset$ 平面 BB_1D，

$\therefore MD \perp AC$.

(3)【解】当 M 为棱 BB_1 的中点时，平面 $DMC_1 \perp$ 平面 CC_1D_1D.

证明如下：

取 DC 的中点 N，D_1C_1 的中点 N_1，连接 NN_1 交 DC_1 于 O，连接 OM，BN，如图所示.



$\because N$ 是 DC 的中点，且 $BD = BC$，

$\therefore BN \perp DC$.

又$\because DC$ 是平面 $ABCD$ 与平面 CC_1D_1D 的交线，平面 $ABCD \perp$ 平面 CC_1D_1D，

$\therefore BN \perp$ 平面 CC_1D_1D.

又可证得 O 是 NN_1 的中点，

$\therefore BM /\!/ ON$ 且 $BM = ON$，

即四边形 $BMON$ 是平行四边形，

$\therefore BN /\!/ OM$，

$\therefore OM \perp$ 平面 CC_1D_1D.

$\because OM \subset$ 平面 DMC_1，

$\therefore$ 平面 $DMC_1 \perp$ 平面 CC_1D_1D.

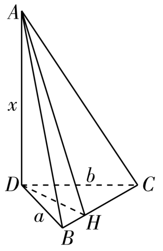
9. CD 【解析】在三棱锥 $A-BCD$ 中，过点 D 在平面 BCD 内作 $DH \perp BC$ 交 BC 于点 H，连接 AH，如图①所示.

设 $AD = x$，$BD = a$，$CD = b$，

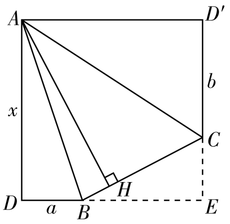
将三棱锥 $A-BCD$ 沿着 AD，BD，CD 剪开，

然后将 $\triangle ADB$，$\triangle ADC$ 分别沿着 AB，AC 都展开在 $\triangle ABC$ 所在的平面内，

如图②所示，得五边形 $ADBCD'$.



图①



图②

由题设知 $\angle DAD'=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAD'=90°$，$AD'=AD=x$，

延长 DB，$D'C$ 交于点 E，

则四边形 $ADED'$ 为正方形，

且 $BE=x-a$，$CE=x-b$，由图①可知，

$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，

由图②可知，在 Rt$\triangle BCE$ 中，有 $BC^2=BE^2+CE^2$，即 $a^2+b^2=(x-a)^2+(x-b)^2$，

所以 $x=a+b$.

由图①知，$AD\perp DB$，$AD\perp DC$，$DB\cap DC=D$，DB，$DC\subset$ 平面 BCD，

所以 $AD\perp$ 平面 BCD，

因为 $BC\subset$ 平面 BCD，所以 $BC\perp AD$，

因为 $BC\perp DH$，$AD\cap DH=D$，AD，$DH\subset$ 平面 ADH，所以 $BC\perp$ 平面 ADH，

因为 $AH\subset$ 平面 ADH，所以 $AH\perp BC$，

故 $\angle AHD$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角，则 $\angle AHD=\theta$.

因为 $AD\perp$ 平面 BCD，$DH\subset$ 平面 BCD，

所以 $AD\perp DH$，故 $\cos\theta=\dfrac{DH}{AH}$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$DH=\dfrac{BD\cdot CD}{BC}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

在 Rt$\triangle ADH$ 中，$AH=\sqrt{AD^2+DH^2}=\sqrt{(a+b)^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

从而 $\cos\theta=\dfrac{ab}{a^2+ab+b^2}\leqslant\dfrac{ab}{3ab}=\dfrac{1}{3}<0.342=\cos 70°$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

当 $0°<\theta<90°$ 时，余弦函数 $y=\cos\theta$ 单调递减，所以 $70°<\theta<90°$，故选 CD.

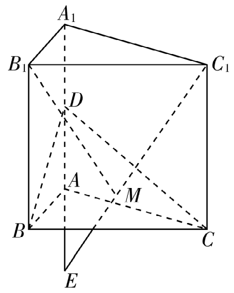
10. CD 【解析】由题意知，$BC\perp AB$，平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore BC\perp$ 平面 ABB_1A_1. 又 $BC\subset$ 平面 BCD,

$\therefore$ 平面 $BCD\perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\therefore$ 易得点 B_1 关于平面 BCD 的对称点 E 落在 A_1A 的延长线上,且 $AE=\sqrt{3}$,即 $A_1E=3\sqrt{3}$,如图所示,当 B_1M+C_1M 的值最小时,C_1,M,E 三点共线.



$\therefore B_1M+C_1M=EM+C_1M\geqslant EC_1=\sqrt{A_1C_1^2+A_1E^2}=\sqrt{9+9+27}=3\sqrt{5}$,即最小值为 $3\sqrt{5}$. 故选 CD.

4.5 几种简单几何体的表面积和体积

4.5.1 几种简单几何体的表面积

1. A 【解析】因为底面正三角形中高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,其重心到顶点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,且棱锥高为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$,所以利用直角三角形勾股定理可得侧棱长为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,斜高为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{a}{2}$,所以侧面积为 $3\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}a^2$. 故选 A.

2. A 【解析】设圆锥的底面半径为 r,母线长为 l,则圆锥底面周长为 $2\pi r=\frac{1}{2}\times 2\pi l$,得 $l=2r$,

所以圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\pi l^2=\frac{1}{2}\pi\times(2r)^2=2\pi r^2$,底面积为 πr^2,

所以侧面积与底面积的比值为 2. 故选 A.

3. D 【解析】因为正四棱台的上、下底面边长分别为 1 cm, 3 cm, 侧棱长为

2 cm,

所以棱台的斜高为 $\sqrt{2^2-\left(\frac{3-1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$ (cm),

所以棱台的侧面积是 $4\times\frac{1+3}{2}\times\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (cm^2). 故选 D.

4. B 【解析】由棱台的概念知,上、下两底面是相似多边形,故它们的面积之比等于对应边长之比的平方,为 1∶4. 故选 B.

5. A 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $BC=3$, $AC=5$, ∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形,以 AB 所在直线为轴旋转一周得到的几何体为圆锥,

∴ 圆锥的底面半径为 3,母线长为 5,

∴ 底面周长为 6π,侧面积为 $\frac{1}{2}\times6\pi\times5=15\pi$, ∴ 几何体的表面积为 $15\pi+\pi\times3^2=24\pi$. 故选 A.

6. B 【解析】因为圆台的上、下底面半径和高的比为 1∶4∶4,母线长为 10,设圆台上底面的半径为 r,则下底面半径和高分别为 $4r$ 和 $4r$,由 $100=(4r)^2+(4r-r)^2$ 得 $r=2$,故圆台的侧面积等于 $\pi(r+4r)\times10=100\pi$. 故选 B.

7. 180 cm^2 【解析】设正六棱柱的底面边长为 a cm,

则底面上最长对角线长为 $2a$ cm,

所以由 $\sqrt{5^2+(2a)^2}=13$,解得 $a=6$,

所以侧面积为 $5\times6a=5\times6\times6=180$ (cm^2).

8. $16+8\sqrt{5}$ 【解析】正四棱锥的四个侧面都是腰长为 3,底边长为 4 的等腰三角形,底面是边长为 3 的正方形,所以四棱锥的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3^2-2^2}+4\times4=16+8\sqrt{5}$.

9. $135\sqrt{3}$ 【解析】正三棱台的两个底面的边长分别为 $6\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$,又棱台的高为 4,则其侧高为 5,故正三棱台的侧面积 $S=3\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{3}+12\sqrt{3})\times5=135\sqrt{3}$.

10. D 【解析】由已知得 $l=2r$（r 为圆锥底面半径，l 为圆锥的母线长），所以 $\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{\pi rl}{\pi r^2}=\frac{l}{r}=2.$

11. C 【解析】设长方体底面长方形的长与宽分别为 a,b，则 $ab=12.$

又由题意知 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2=10$，解得 $a=4,b=3$，故长方体的侧面积为 $2\times(4+3)\times 2=28$，故选 C.

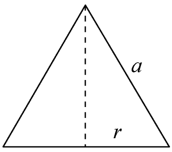
12. $3:2$ 【解析】依题意，设圆柱的底面半径为 r，则圆柱的高为 $2r$，球的半径为 r，则 $S_1=2\pi r^2+2\pi r\cdot 2r=6\pi r^2$，$S_2=4\pi r^2$，故 $S_1:S_2=6\pi r^2:4\pi r^2=3:2.$

13. $\frac{(3+\sqrt{5})\pi}{16}$ 【解析】由圆柱的表面积公式可得这个几何体上半部分的表面积 $S_1=2\pi\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3\pi}{16}$，

由圆锥侧面积公式可得这个几何体下半部分的表面积 $S_2=\pi\times\frac{1}{4}\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}\pi}{16}.$

故几何体的表面积为 $S_1+S_2=\frac{3\pi}{16}+\frac{\sqrt{5}\pi}{16}=\frac{(3+\sqrt{5})\pi}{16}.$

14. $\frac{3}{4}\pi a^2$ 【解析】如图所示，



圆锥的底面半径 $r=\frac{a}{2}$，母线长 $l=a$，则其表面积 $S_{表}=\pi r(r+l)=\pi\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)=\frac{3}{4}\pi a^2.$

15. $72\ \mathrm{cm}^2$ 【解析】由题意知棱柱的侧面积 $S_{侧}=3\times6\times4=72(\mathrm{cm}^2).$

4.5.2　几种简单几何体的体积

1. B 【解析】取 AC 中点 D，连接 BD（图

略),则 $BD \perp AC$,则旋转体是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 绕 AC 所在直线旋转形成两个圆锥的组合体. 由已知可得 $AD=CD=3$, $BD=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所求体积为 $V=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times3\times2=32\pi$. 故选 B.

2. D 【解析】设圆柱的高为 h,则 $\pi R^2h=3\times\frac{4}{3}\pi R^3$,所以 $h=4R$.

3. C 【解析】由题意,球的直径与正方体的棱长相等. 设正方体的棱长为 a,则 $6a^2=6$,故 $a=1$ cm,所以 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi(\text{cm}^3)$.

4. B 【解析】截面面积为 π,则该小圆的半径为 1. 设球的半径为 R,则 $R^2=1^2+1^2=2$,所以 $R=\sqrt{2}$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

5. $\sqrt{6}\pi$ 【解析】设长方体的棱长为 a,b,c,外接球的半径为 r,由题意得 $\begin{cases}ab=\sqrt{2},\\ac=\sqrt{3},\\bc=\sqrt{6},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=1,\\c^2=3,\\b^2=2,\end{cases}$ 所以 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.

6. 29π 【解析】三棱锥 $B-ACD$ 的侧面积为 $\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times AB+\frac{1}{2}\times4\times AB=13$,所以 $AB=3$,故该三棱锥外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{2^2+4^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$,外接球的表面积为 $4\pi R^2=29\pi$.

7. 324 【解析】由题可知,该预制件可看成由一个长方体挖去一个底面为等腰梯形的四棱柱后剩下的几何体,所以该预制件的底面积 $S_{底面}=6\times11-\frac{1}{2}\times(5+3)\times3=54(\text{m}^2)$,设该预制件的高为 h,则该预制件的体积 $V=S_{底面}\cdot h=54\times6=324(\text{m}^3)$. 故浇制一个这样的预制件需要约 324 m^3 的混凝土.

8.【解】(1) 设球的半径为 r，则圆柱底面半径为 r，高为 $2r$，$\therefore$ 圆柱的体积 $V_1=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3$，球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi r^3$.

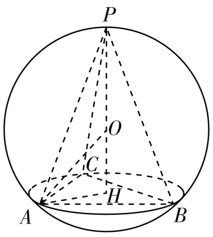
$\therefore$ 圆柱与球的体积比 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{2}$.

(2) 由题可知圆锥底面半径 $r_1=12\ \text{cm}$，高 $2r_1=24\ \text{cm}$，$\therefore$ 圆锥的母线长 $l=\sqrt{r_1^2+(2r_1)^2}=\sqrt{5}r_1=12\sqrt{5}(\text{cm})$，$\therefore$ 圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot 2r_1=\frac{2}{3}\pi\times 12^3=1\ 152\pi(\text{cm}^3)$，圆锥的表面积 $S=\pi r_1^2+\pi r_1 l=144\pi+144\sqrt{5}\pi=144(1+\sqrt{5})\pi(\text{cm}^2)$.

9. B 【解析】因为圆柱的轴截面为正方形，母线长为 6，

所以圆柱的底面圆直径和高都是 6，

所以该圆柱的内切球的半径为 3，如图，球 O 即为该圆柱的内切球.



若该圆柱内放置一个棱长为 a 的正四面体，并且正四面体在该圆柱内可以任意转动，则该正四面体内接于该圆柱的内切球时，棱长 a 最大.

如图该正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 a，设点 P 在平面 ABC 内的投影为 H，即 $PH\perp$ 平面 ABC，

则球心 O 在 PH 上，且 $OP=OA=3$，

$AH=\frac{2}{3}AB\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所以 $PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

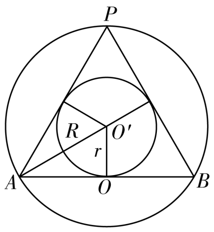
所以 $OH=PH-OP=\frac{\sqrt{6}}{3}a-3$，

在 Rt$\triangle OAH$ 中，$OA^2=OH^2+AH^2$，即 $3^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$，整理可得 $a^2-2\sqrt{6}a=0$，解得 $a=2\sqrt{6}$ 或 $a=0$（舍），所

以 a 的最大值为 $2\sqrt{6}$，故选 B.

10. A 【解析】如图所示，等边三角形 PAB 的内切圆和外接圆的半径即为圆锥 PO 的内切球和外接球的半径，记内切球和外接球的半径分别为 r 和 R，则 $\frac{r}{R}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

所以其外接球与内切球的表面积之比为 $\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=4:1$.



11. $2\sqrt{3}$ 【解析】在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=3$，则正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V_1=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times3=3\sqrt{3}$，三棱锥 A_1-ABC 的体积 $V_2=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times3=\sqrt{3}$，所以四棱锥 $A_1-B_1C_1CB$ 的体积 $V=V_1-V_2=2\sqrt{3}$.

12. 32 【解析】因为正方形 $ABCD$ 外接圆的半径 $r=\frac{\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}}{2}=4$，球 O 的半径 $R=5$，所以球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=3$，

所以 $V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\times(4\sqrt{2})^2\times3=32$.

13. $\frac{1}{6}$ 【解析】三棱锥 D_1-EDF 的体积即为三棱锥 $F-DD_1E$ 的体积.

因为 E,F 分别为 AA_1,B_1C 上的点，所以正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $\triangle EDD_1$ 的面积为定值 $\frac{1}{2}$，点 F 到底面 DD_1E 的距离为定值 1，所以 $V_{D_1-EDF}=V_{F-DD_1E}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

14. $\frac{4}{29}$ 【解析】设 $BC=3a$，因为 $AB\perp BC$，$\tan\angle BAC=\frac{3}{4}$，

所以 $AB=4a$，$AC=5a$.

设$\triangle ABC$的内切圆的半径为 r，

则$\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，

即$\frac{1}{2}(4a+3a+5a)r=\frac{1}{2}\times4a\times3a$，解得 $r=a$.

因为三棱柱有内切球，所以 $AA_1=2a$.

因为 $AB\perp BC$，$BB_1\perp AB$，$BB_1\perp BC$，

所以直三棱柱的外接球的直径就是以 BA，BC，BB_1 为棱的长方体的体对角线（提示：可补形为长方体），其长为 $\sqrt{BB_1^2+BA^2+BC^2}=\sqrt{4a^2+16a^2+9a^2}=\sqrt{29}a$.

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球的表面积为 $4\pi a^2$，外接球的表面积为 $29\pi a^2$，

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球与外接球的表面积之比为$\frac{4}{29}$.

15. 84 【解析】由祖暅原理，该不规则几何体的体积与正六棱台的体积相等，正六棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4，设上底面面积为 S_1，下底面面积为 S_2，高 $h=2\sqrt{3}$，

则 $S_1=6\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$，$S_2=6\times\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$，故所求体积 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times(6\sqrt{3}+24\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}\times24\sqrt{3}})\times2\sqrt{3}=84$.

16. (1)【证明】$\because CA=CB$，O 为 AB 的中点，$\therefore OC\perp AB$，

$\because AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$，

$\therefore \triangle AA_1B$ 为等边三角形，

$\therefore OA_1\perp AB$. 又 $OC\cap OA_1=O$，

$\therefore AB\perp$平面 A_1OC.

(2)【解】$\because AB=CB=2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为边长是 2 的等边三角形，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

$\because OA_1\perp AB$，$OA_1\perp OC$，$AB\cap OC=O$，

$\therefore OA_1\perp$平面 ABC，

即 OA_1 是三棱锥 A_1-ABC 的高.

又由已知可得 $OA_1=\sqrt{3}$,∴ 三棱锥 A_1-ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

17. AB 【解析】如图,连接 BD,设 $B_1F\perp$ 平面 $ABCD$ 于 F,$B_1E\perp BC$ 于 E,连接 EF,则 B_1F 是高,B_1E 是斜高,显然 F 在对角线 BD 上,$B_1F=1$,$AB=4$,$A_1B_1=2$,则 $BF=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})=\sqrt{2}$,所以 $BB_1=\sqrt{BF^2+B_1F^2}=\sqrt{3}$,A 正确.

在 Rt$\triangle B_1EF$ 中,易知 $\angle B_1EF$ 是二面角 $A-BC-B_1$ 的平面角,$EF=\frac{1}{2}\times(4-2)=1=B_1F$,所以 $\angle B_1EF=\frac{\pi}{4}$,B 正确.

该四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times1\times(2^2+2\times4+4^2)=\frac{28}{3}$,C 错误.

因为 $BC/\!/AD$,所以 BC 与 AA_1 所成的角为 $\angle A_1AD$ 或其补角. 又 $BE=\frac{1}{2}\times(4-2)=1$,所以 $\cos\angle B_1BC=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又正四棱台中 $\angle A_1AD=\angle B_1BC$,所以 $\cos\angle A_1AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 AA_1 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,D 错误. 故选 AB.